JÜRGEN ALTENBRUNN

Die Fluchtgeschwindigkeit einer kleinen Masse aus dem Schwerefeld einer großen Masse

Inhalt

Zusammenfassung

In dieser Schrift wird betrachtet mit welcher Geschwindigkeit sich eine kleine Masse m_K von einer großen Masse m_G bei der Entfernung r weg bewegen muß, um das Gravitationsfeld der großen Masse zu verlassen.

Wenn man die relativistischen Gleichungen im nichtrelativistischen Bereich testet, muß auch wieder die klassische Newtonsche Lösung dabei herauskommen. Auch dieser Test wird zur Überprüfung der Plausibilität hier gemacht.

1. Einleitung

In dieser Schrift wird betrachtet mit welcher Geschwindigkeit sich eine kleine Masse m_K von einer großen Masse m_G bei der Entfernung r weg bewegen muß, um das Gravitationsfeld der großen Masse zu verlassen.

Die Fluchtgeschwindigkeit einer kleinen Masse aus dem Gravitationsfeld einer großen Masse ist ein Maß dafür, wie viel Energie die kleine Masse beim freien Fall aus dem Unendlichen auf die große Masse aufnimmt. Die Fluchtgeschwindigkeit ist betragsgleich der Fallgeschwindigkeit, nur die Richtung ist entgegengesetzt. Fall- und Fluchtgeschwindigkeit sind unabhängig von der Größe und der Struktur der kleinen Masse. Ein Hammer und eine Feder fallen im luftleeren Raum gleich schnell. und sie haben auch die gleiche Fluchtgeschwindigkeit.

Fall- und Fluchtgeschwindigkeit sind ein Maß für das Gravitationspotential welches auf die kleine Masse wirkt. Das Gravitationspotential ist die Fähigkeit einer Masse, aus ihrem Gravitationsfeld Energie zu erzeugen. Da es keine unendlichen Energien im endlichen Raum gibt, kann es auch keine unendlich großen Gravitationspotentiale geben.

Diese Fallgeschwindigkeit kann daher nie die Lichtgeschwindigkeit erreichen oder überschreiten, denn dann würde die fallende Masse unendlich viel Energie aufnehmen. Und unendlich viel Energie gibt es nicht in einem endlichen Raum. Und so kann auch die Fluchtgeschwindigkeit nie die Lichtgeschwindigkeit erreichen. Es gibt keine unendlich großen Gravitationspotentiale auch nicht an extremen Massekonzentrationen (ehemals Schwarze Löcher). Wie man die Singularitäten an extremen Massekonzentrationen in der Relativitätstheorie vermeiden kann ist in [1] dargelegt. Auf diese Darlegung der Relativitätstheorie ohne Ereignishorizonte bezieht sich diese Schrift.

Die Fluchtgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, bei der die kinetische Energie eines Körpers ausreicht, um die potentielle Energie zur Entfernung des Körpers aus dem Schwerefeld einer

Masse zu überwinden. Man kann die Fluchtgeschwindigkeit also ausrechnen, in dem man diese beiden Energien gleichsetzt. Und genau auf diese Weise wird in dieser Schrift die Fluchtgeschwindigkeit ermittelt.

Die Grundeigenschaften einer Masse sind die Trägheit, die Schwere und der Energiegehalt. Für uns besonders wichtig ist die Schwere. Eine große Masse und eine kleine Masse ziehen sich nach der Gleichung :

(1.1) $$F = \frac{G \cdot m_K \cdot m_G}{r^2}$$

an. Dabei ist F die anziehende Kraft, G ist die Gravitationskonstante, m_K ist die kleine Masse, m_G ist die große Masse und r ist die Entfernung zwischen den Massezentren der großen und der kleinen Masse. Diese Gleichung (1.1) ist Grundlage dieser ganzen Betrachtung.

2. Die Energieverteilung zwischen großer und kleiner Masse

Die Umkehrung der Flucht einer kleinen Masse aus dem Gravitationsfeld einer großen Masse ist der freie Fall der kleinen Masse in das Gravitationsfeld der großen Masse. Oft wird so getan, als ob die Energie, die beim freien Fall frei wird, und in Bewegungsenergie umgesetzt wird, ausschließlich bei der kleinen Masse landet. Im Wesentlichen ist das auch so, aber nicht ausschließlich. Weil das im nächsten Kapiteln sehr wichtig wird, möchte ich das noch ein wenig begründen.

Ein physikalisches Gesetz, was bei Bewegungsänderungen ganz wesentlich ist, ist das Impulserhaltungsgesetz. Für einen anfänglich zu den beiden Massen ruhenden Beobachter gilt :

(2.1) $$m_K \cdot \vec{v}_K + m_G \cdot \vec{v}_G = 0$$

Dabei sind $\vec{v}_K$ und $\vec{v}_G$ die Geschwindigkeitsvektoren der beiden Massen m_K und m_G und sie sind auch beide 0 da die beiden Massen ja ruhen sollen. Wenn nun durch eine Kraft zwischen m_K und m_G die kleine Masse m_K bewegt wird, dann wird auch m_G in entgegengesetzter Richtung bewegt, damit der Gesamtimpuls 0 bleibt. Es gilt also für den ruhenden Beobachter :

(2.2) $$m_K \cdot \vec{v}_K = - m_G \cdot \vec{v}_G$$

Uns interessieren nur die Beträge der Geschwindigkeiten. deshalb kann man vereinfachen. Man läßt das Minuszeichen und das Vektorkennzeichen weg und erhält :

(2.3) $$m_K \cdot v_K = m_G \cdot v_G = p$$

p ist der Betrrag des Impulses, und der ist für beide Massen gleich. Das kann man auch als Proportion schreiben und erhält :

(2.4) $$\frac{v_K}{v_G} = \frac{m_G}{m_K}$$

Die kinetische Energie der Masse ist :

(2.5) $$E_{KIN} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot p \cdot v$$

Die kinetische Energie der kleinen und der großen Masse ist :

(2.6) $$E_{KIN\_K} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot v_K = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{m_G}{m_K} \cdot v_G$$

(2.7) $$E_{KIN\_G} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot v_G$$

Der Impuls p ist für beide Massen m_G und m_K betragsgleich. Aber durch die größere Geschwindigkeit ist die kinetische Energie der kleinen Masse um den Faktor $\frac{m_G}{m_K}$ größer als die kinetische Energie der großen Masse. Es wird also beim Zusammenfallen einer kleinen und einer großen Masse fast alle kinetische Energie in die kleine Masse transportiert. Ebenso kann man natürlich sagen, bei der Entfernung der kleinen Masse von der großen Masse wird fast nur kinetische Energie der kleinen Masse aufgebraucht. Das ist sehr wichtig für die folgenden Kapitel.

3. Die Fluchtgeschwindigkeit im klassischen Potential (Newtonsche Lösung)

Die potentielle Energie ist die Fähigkeit, aus der Gravitationskraft (Gravitationsfeld) einer Masse Energie zu gewinnen. Diese Energie wird umgesetzt, wenn man eine kleine Masse m_K im Gravitationsfeld einer großen Masse m_G zur großen Masse hin oder von der großen Masse weg bewegt. Die Energie ist :

(3.1) $\Delta E = F \cdot \Delta r$ (Energie = Kraft · Weg)

In diese Gleichung setzt man die Gleichung (1.1) ein und erhält :

(3.2) $$\Delta E = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \Delta r$$

Gleichung (3.2) muß man als Integral formulieren, um sie allgemein zu lösen. Man erhält :

(3.3) $$\int dE = \int \frac{G \cdot m_K \cdot m_G}{r^2} dr$$

Die Lösung der Integrale lautet :

(3.4) $$E = \text{const} - \frac{G \cdot m_K \cdot m_G}{r}$$

Für die Integrationskonstante kann man als sinnvollen Wert $m_K \cdot c^2$ einsetzten und man erhält als potentielle Energie :

(3.5) $$E = m_K \cdot c^2 - \frac{G \cdot m_K \cdot m_G}{r}$$

Das Minuszeichen vor dem rechten Term bedeutet, daß die potentielle Energie bei der Annäherung abnimmt. Uns interessiert die Energieänderung von unendlicher Entfernung bis zum Radius r. Dafür muß man

(3.6) E = E(unendlich) - E(r)

subtrahieren. Dabei fällt $m_K \cdot c^2$ heraus, es ist in E(unendlich) und in E(r) enthalten. Der rechte Term für r=unendlich ergibt sich null und davon muß man Gleichung (3.4) rechter Teil für den Endwert r abziehen. Damit ergibt sich für die Energiedifferenz vom Unendlichen bis zum Abstand r :

(3.7) $$E = \frac{G \cdot m_K \cdot m_G}{r}$$

Der Schwarzschild-Radius ist definiert als :

(3.8) $$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2}$$

Das muß man minimal umstellen und man erhält :

(3.9) $$\frac{R_S \cdot c^2}{2} = G \cdot m$$

In der Gleichung (3.7) kann man für $G \cdot m_G$ den linken Teil der Gleichung (3.9) einsetzen. R_S ist natürlich der Schwarzschild-Radius der großen Masse. Dann erhält man :

(3.10) $$E = \frac{R_{SG}}{2 \cdot r} \cdot m_K \cdot c^2$$

Das ist die potentielle Energie die zur Entfernung der kleinen Masse aus dem Gravitationsfeld vom Abstand r bis ins unendliche notwendig ist. Diese potentielle Energie setzt man mit der notwendigen kinetischen Energie gleich und erhält :

(3.11) $$\frac{1}{2} \cdot m_K \cdot v^2 = \frac{R_{SG}}{2 \cdot r} \cdot m_K \cdot c^2$$

m_k und 1/2 sind auf beiden Seiten der Gleichung. Man kann mit 2 multiplizieren und durch m_k dividieren und erhält :

(3.12) $$v^2 = \frac{R_S}{r} \cdot c^2$$

Jetzt muß man nur noch die Wurzel ziehen und man erhält als Fluchtgeschwindigkeit :

(3.13) $$v = \sqrt{\frac{R_S}{r}} \cdot c$$

Diese Gleichung (3.13) für die Fluchtgeschwindigkeit mag ungewöhnlich erscheinen, aber sie stimmt für alle klassischen (nichtrelativistischen) Objekte. Ich finde diese Gleichung (3.13) für die klassische Fluchtgeschwindigkeit sogar richtig schön und hervorragend einfach.

Wenn man reale Zahlenwerte einsetzt, kommt für die Erde (R_S = 8,8722 mm, r = 6378 km) dabei 11,2 km/s Fluchtgeschwindigkeit von der Oberfläche heraus, für die Sonne (R_S = 2954,3 m, r = 695800 km) kommt dabei 618 km/s Fluchtgeschwindigkeit von der „Oberfläche" heraus. Bei einer Fluchtgeschwindigkeit von c/10 dürfte der Fehler durch die Anwendung der klassischen nichtrelativistischen Gleichungen in der Größenordnung von 1% liegen.

4. Relativistische Gleichungen bei nichtrelativistischen Geschwindigkeiten

Wenn man die relativistischen Gleichungen für die potentielle Energie in die Gleichungen zur Ermittlung der Fluchtgeschwindigkeit einsetzt, muß mit nichtrelativistischen Werten das selbe Ergebnis herauskommen wie im 3. Kapitel für die Newtonsche nicht-relativistische Lösung. Und das möchte ich hier vorführen.

In [1] ist die Änderung der kleinen Masse bei der Annäherung an die große Masse angegeben mit :

(4.1) $$m_{KA} = m_{K0} \cdot e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}}$$ (Gleichung (2.33 in [1])

Dabei ist m_{KA} die aktuelle kleine Masse, m_{K0} die kleine Masse in unendlicher Entfernung von der großen Masse, R_S der Schwarzschild-Radius der großen Masse und r wieder der Abstand der beiden Massezentren. Uns interessiert nur die Masseänderung, weil das der potentiellen Energie zwischen unendlicher Entfernung und dem Radius r entspricht. Diese Masseänderung ist :

(4.2) $$\Delta m_K = m_{K0} - m_{K0} \cdot e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}}$$

m_{K0} kann man ausklammern und erhält dann :

(4.3) $$\Delta m_K = m_{K0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}}\right)$$

Um den selben Betrag ändert sich auch die große Masse, denn die Energie wird zu gleichen Teilen aus dem Gravitationsfeld der kleinen und der großen Masse entnommen (siehe Herleitung in [1]). Die komplette Massenänderung von großer und kleiner Masse ist also :

$$\Delta m = 2 \cdot m_{K0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}}\right) \tag{4.4}$$

Zur Ermittlung der potentiellen Energie muß man diese Masseänderung mit c^2 multiplizieren und erhält dann :

$$E = 2 \cdot m_{K0} \cdot c^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}}\right) \tag{4.5}$$

Diese relativistisch ermittelte potentielle Energie wird je nach Masseverhältnis von großer zur kleinen Masse (siehe Kapitel 2) fast vollständig in kinetische Energie der kleinen Masse umgesetzt. Wir wollen die relativistische potentielle Energie im nichtrelativistischen Bereich testen, und können dazu die nichtrelativistische Bewegungsenergie einsetzen. Dann erhalten wir :

$$\frac{1}{2} \cdot m_{K0} \cdot v^2 = 2 \cdot m_{K0} \cdot c^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}}\right) \tag{4.6}$$

Diese Gleichung (4.6) multipliziert man mit 2 und dividiert man durch m_{K0} und erhält dann :

$$v^2 = 4 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}}\right) \cdot c^2 \tag{4.7}$$

Jetzt muß man nur noch die Wurzel ziehen und erhält :

$$v = \sqrt{4 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}}\right)} \cdot c \tag{4.8}$$

Den Ausdruck in der Klammer kann man für kleine Werte nur sehr schlecht ausrechnen. Für sehr kleine Werte im Exponenten der e-Funktion (r groß gegen R_S) steht da in der Klammer im Prinzip 1-1, denn die Werte der e-Funktion sind nur sehr gering abweichend von 1. Deshalb muß man hier mit einer vernünftigen Näherung für die e-Funktion im Nullpunkt rechnen.

Die e-Funktion hat im Nullpunkt den Funktionswert 1 und den Anstieg 1. Ein Faktor vor dem Exponenten verändert nur den Anstieg auf den Faktor. Deshalb kann man die e-Funktion im Nullpunkt sehr gut durch eine Gerade annähern. Diese Gerade ist :

(4.9) $$e^{x} \approx 1 + x$$ (Näherung im Nullpunkt)

Auf unsere Gleichung 4.8 angewendet bedeutet das :

(4.10) $$e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}} \approx 1 - \frac{R_S}{4 \cdot r}$$ (Näherung im Nullpunkt)

Diese Näherung setzt man in die Klammer der Gleichung (4.8) ein und erhält :

(4.11) $$1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}} = 1 - \left(1 - \frac{R_S}{4 \cdot r}\right) = \frac{R_S}{4 \cdot r}$$

Diese Näherung ist für r = 10 R_S etwa 1,3% genau. Diese Genauigkeit wächst stark an, je größer r wird. Das Ergebnis der Gleichung (4.11) setzt man in die Klammer der Gleichung (4.8) ein und erhält :

(4.12) $$v = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{R_S}{4 \cdot r}\right)} \cdot c = \sqrt{\frac{R_S}{r}} \cdot c$$

Dieses Ergebnis entspricht exakt dem klassisch ermittelten Wert in der Gleichung (3.13) Die relativistische potentielle Energie entspricht also im Fernfeld der klassischen potentiellen Energie ! Auch wenn es durch die e-Funktion nicht so klar ersichtlich ist.

5. Die komplett relativistische Betrachtung der Fluchtgeschwindigkeit

Zur komplett relativistischen Betrachtung wird die in der Gleichung (4.5) ermittelte potentielle Energie bei der Annäherung einer kleinen Masse aus dem Unendlichen bis zum Radius r jetzt mit der relativistischen Bewegungsenergie gleichgesetzt.

Die relativistische Energie einer Masse ist :

$$(5.1) \qquad E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot m \cdot c^2$$

Davon muß man die Ruhemasse subtrahieren um die kinetische Energie zu erhalten und es ergibt sich :

$$(5.2) \qquad E_{KIN} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot m \cdot c^2 - m \cdot c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot m \cdot c^2$$

Es soll die kinetische Energie der kleinen Masse ermittelt werden. Deshalb muß man für m die aktuelle kleine Masse m_{KA} beim Abstand r von der großen Masse einsetzten. Die Gleichung lautet dann :

$$(5.3) \quad E_{KIN} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot m_{KA} \cdot c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}} \cdot m_{K0} \cdot c^2$$

Diese kinetische Energie setzt man der potentiellen Energie aus Gleichung (4.5) gleich und erhält :

$$(5.4) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}} \cdot m_{K0} \cdot c^2 = 2 \cdot m_{K0} \cdot c^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}} \right)$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung (5.4) durch $m_{K0} \cdot c^2$ dividiert, erhält man :

$$(5.5) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}} = 2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_S}{4 \cdot r}} \right)$$

Diese Gleichung (5.5) muß man nun nach v auflösen um die Fluchtgeschwindigkeit zu erhalten. Dazu dividiert man beide Seiten der Gleichung (5.5) durch die e-Funktion und erhält :

(5.6) $$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 = 2 \cdot \left(e^{\frac{R_S}{4 \cdot r}} - 1 \right)$$

Dazu addiert man 1 auf beiden Seiten der Gleichung (5.6) und erhält :

(5.7) $$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2 \cdot e^{\frac{R_S}{4 \cdot r}} - 1$$

Davon bildet man den Kehrwert und erhält :

(5.8) $$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2 \cdot e^{\frac{R_S}{4 \cdot r}} - 1}$$

Diese Gleichung (5.8) muß man Quadrieren und erhält :

(5.9) $$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(2 \cdot e^{\frac{R_S}{4 \cdot r}} - 1\right)^2}$$

Von Gleichung (5.9) muß man auf beiden Seiten 1 subtrahieren und mit -1 multiplizieren und erhält dann :

(5.10) $$\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{\left(2 \cdot e^{\frac{R_S}{4 \cdot r}} - 1\right)^2}$$

Nun muß man nur noch mit c^2 multiplizieren und die Wurzel ziehen und man erhält :

(5.11) $$v = \sqrt{1-\frac{1}{\left(2 \cdot e^{\frac{R_S}{4 \cdot r}} - 1\right)^2}} \cdot c$$

Das ist die relativistische Fluchtgeschwindigkeit einer kleinen Masse aus dem Gravitationsfeld einer großen Masse mit dem Schwarzschild-Radius R_S vom Abstand r zum Zentrum der großen Masse aus. Der Faktor vor c ist immer zwischen 0 und 1, die Fluchtgeschwindigkeit kann also nur zwischen 0 und c liegen. Die Fluchtgeschwindigkeit wird nirgendwo unendlich oder größer als die Lichtgeschwindigkeit. Genau so groß ist natürlich auch die Fallgeschwindigkeit einer kleinen Masse aus dem Unendlichen bis zum Abstand r zum Zentrum der großen Masse. Nur die Richtung der Fallgeschwindigkeit ist entgegengesetzt zur Richtung der Fluchtgeschwindigkeit.

Für r = unendlich erhält man :

(5.12) $$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(2 \cdot e^{0} - 1\right)^{2}}} \cdot c = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(2 - 1\right)^{2}}} \cdot c = 0$$

Das ist plausibel, im Unendlichen ist die Fluchtgeschwindigkeit 0. Für r = 0 erhält man :

(5.13) $$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(2 \cdot e^{\infty} - 1\right)^{2}}} \cdot c = \sqrt{1 - \frac{1}{\infty}} \cdot c = c$$

r = 0 ist unmöglich, denn Masse hat immer eine endliche Dichte. Unendliche Dichten gibt es nicht ! Deshalb muß zwischen den Massezentren der beiden Massen immer ein Abstand r existieren.

Am Schwarzschild-Radius der großen Masse, also für r = R_S, ergibt sich :

(5.14) $$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(2 \cdot e^{\frac{1}{4}} - 1\right)^{2}}} \cdot c = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(2{,}5681 - 1\right)^{2}}} \cdot c = 0{,}7703\ c$$

Das sind plausible Werte der Fluchtgeschwindigkeit.

Auch diese Gleichung (5.11) muß für kleine Werte der klassischen Lösung entsprechen. Diesen Test möchte ich hier im Folgenden darlegen. Dazu setzt man die Näherung (4.9) für die e-Funktion mit kleinen Werten in die Gleichung (5.11) ein und erhält :

$$(5.15) \qquad v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(2 \cdot \left(1 + \frac{R_S}{4 \cdot r}\right) - 1\right)^2}} \cdot c = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{R_S}{2 \cdot r}\right)^2}} \cdot c$$

Das Binom unter dem Bruchstrich muß man quadrieren und man erhält :

$$(5.16) \qquad v = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{R_S}{r} + \left(\frac{R_S}{2 \cdot r}\right)^2}} \cdot c$$

Für kleine Werte $\frac{R_S}{r}$ gilt, daß das Quadrat $\left(\frac{R_S}{2 \cdot r}\right)^2$ noch wesentlich kleiner ist. Man kann es daher in der Näherung weglassen. Dann erhält man :

$$(5.17) \qquad v = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{R_S}{r}}} \cdot c$$

Jetzt muß man wieder die Näherung mit der Proportion einsetzen :

$$(5.18) \qquad \frac{1}{1 + \frac{R_S}{r}} \approx \frac{1 - \frac{R_S}{r}}{1}$$

Wenn man die rechte Seite der Proportion (5.18) in die Gleichung (5.17) für den Bruch unter der Wurzel einsetzt, erhält man :

$$(5.19) \qquad v = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} \cdot c = \sqrt{\frac{R_S}{r}} \cdot c$$

Das Ergebnis ist die Bestätigung, daß auch die Gleichung (5.11) für relativistische Fluchtgeschwindigkeiten im Fernfeld für Werte im Bereich der nichtrelativistischen Physik genau der klassischen Lösung Gleichung (3.13) entspricht. Das muß auch so sein.

In der Gleichung (5.11) ist die Fluchtgeschwindigkeit einer beliebigen kleinen Masse aus dem Schwerefeld einer beliebigen großen Masse mit endlicher Dichte beschrieben. Die Fluchtgeschwindigkeit ist für alle r ausrechenbar und ergibt sinnvolle Werte. Die Funktion v(r) ist im gesamten Wertebereich von r definiert. Nur für den wegen der endlichen Dichte von Massen unmöglichen Wert $r = 0$ ergibt sich die unmögliche Fluchtgeschwindigkeit $v = c$. Die Abhängigkeit der Fluchtgeschwindigkeit vom Abstand r der kleinen Masse zum Zentrum der großen Masse ist plausibel.

Bei der numerischen Überprüfung ergibt sich als relativistischer Effekt eine Verringerung der Fluchtgeschwindigkeit gegenüber der klassischen Lösung. Diese Verringerung der Fluchtgeschwindigkeit beträgt bei der Sonne 0,82 m/s bei einer Fluchtgeschwindigkeit von 618 km/s. Beim Abstand $r = R_S$ (am Schwarzschild-Radius) ergibt sich eine Fluchtgeschwindigkeit von 230917 km/s, also deutlich weniger als die Lichtgeschwindigkeit.

In den Bildern 1 und 2 ist die Abhängigkeit der Flucht- und Fallgeschwindigkeit eines Körpers vom Abstand zum Zentrum einer großen schweren Masse grafisch dargestellt. Dazu wurden je Dekade 10 Funktionswerte entsprechend Gleichung (5.11) ausgerechnet und daraus zwei Darstellungen hergestellt. Um normierte Bilder zu erzeugen wurde der Abstand in r/R_S angegeben. Bild 2 ist ein Ausschnitt aus Bild 1.

Die Wurzelfunktion der Gleichung (3.13) ist in der doppelt logarithmischen Darstellung eine Gerade. Diese Gerade kann man im Bild 1 auf der rechten Seite erkennen. In der Nähe des Schwarzschild-Radiusses knickt die Kurve in die Waagerechte ab und nähert sich der Funktion $v = c$. Diese Funktion wird nie erreicht, aber das kann man in der grafischen Darstellung nicht erkennen. Im Bild 2 kann man de Übergang von der Wurzelfunktion nach Gleichung (3.13) zur Funktion $v = c$ sehr gut erkennen.

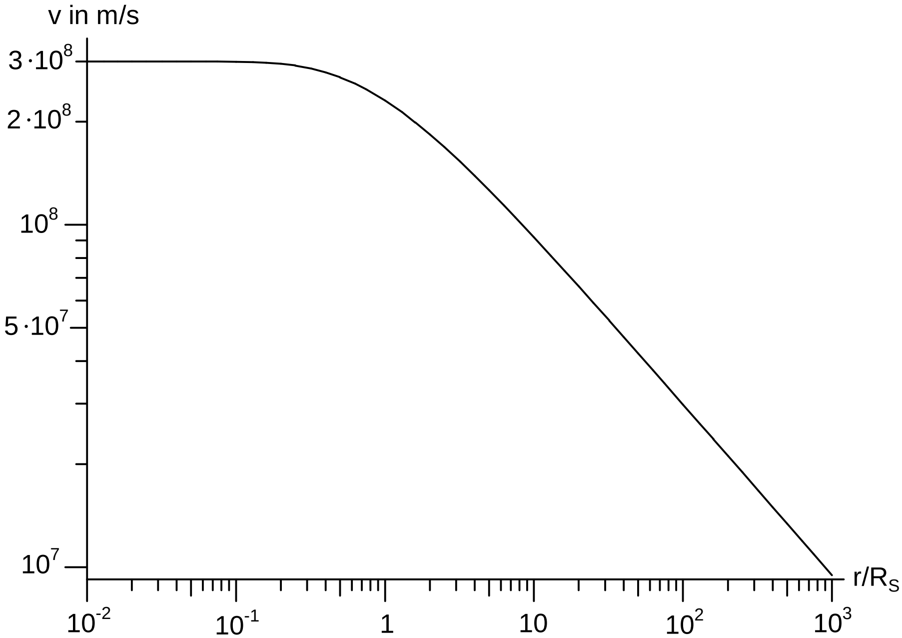

Bild 1 : Die Fluchtgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand r zum Zentrum einer großen Masse. Der Abstand ist in r/R_S angegeben.

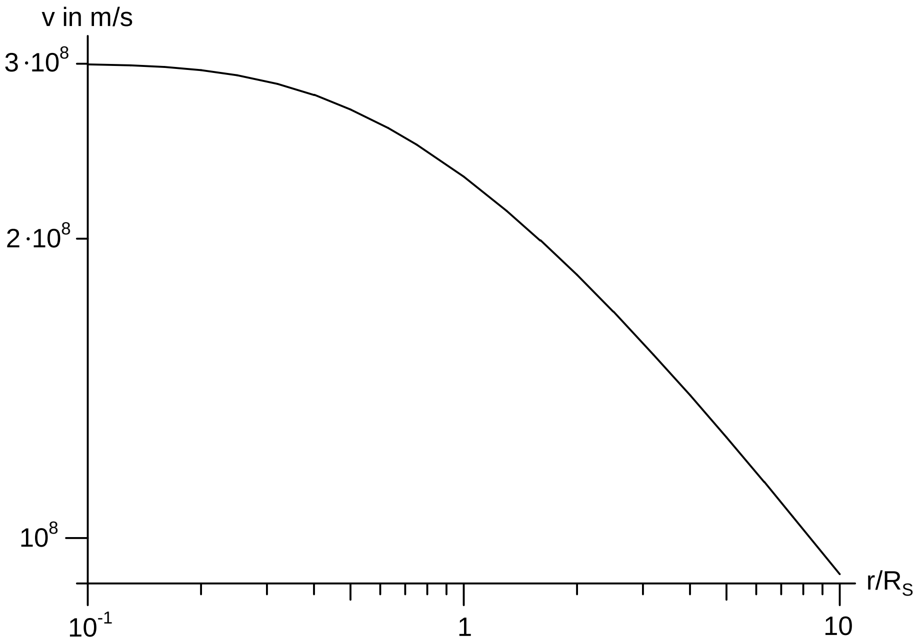

Bild 2 : Die Fluchtgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand r zum Zentrum einer großen Masse. Der Abstand ist in r/R_S angegeben.

5. Literatur / Referenz

Die Schriften sind als PDF-Dateien im Internet auf :

www.altenbrunn.de/wissen.htm

erhältlich. Dort sind auch noch andere Dateien zum herunterladen, einige auch in englischer Sprache. Die englisch-sprachigen Dateien sind Übersetzungen der deutschen Originaldateien.

[1] Jürgen Altenbrunn, Die Relativitätstheorie ohne Singularitäten
Selbstverlag (PDF im Internet auf www.altenbrunn.de)
(in englisch auch www.vixra.org/abs/1502.0233)

[2] Jürgen Altenbrunn, Die Masse-Energie-Äquivalenz
Selbstverlag (PDF im Internet auf www.altenbrunn.de)

[3] Jürgen Altenbrunn, Die kosmologische Rotverschiebung als Folge der allgemeinen Relativitätstheorie
Selbstverlag (PDF im Internet auf www.altenbrunn.de)
(in englisch auch www.vixra.org/abs/1502.0235)